

LEONARDO PISANO FIBONACCI



Leonardo Pisano Fibonacci¹ (ca 1170 – ca 1240...1250), tuntud ka kui Leonardo Bonacci, Leonardo Pisast või Leonardo Bigollo Pisano (Leonardo Rändaja Pisast) oli itaalia matemaatik Pisa vabariigist, keda peeti keskaja kõige andekamaks läänemaaailma matemaatikuks. Fibonaccil oli oluline roll antiikse matemaatika elustamisel ja ta lisas sellele olulise panuse – tema raamat *Liber abaci* tõi Euroopasse hindu-araabia positsioonilise kümnendsüsteemi ja araabia numbrid.

Leonardo Pisano Fibonacci (edaspidi Fibonacci) sündis 13. sajandil, mil pea kõikidel inimaktiivsuse aladel toimusid väga suured muutused. Sellel sajandil kulmineerus pikk vastasseis paavstiriikide ja Püha Rooma riigi vahel; sajand tõi kaasa kodanikuvabaduse alguse Inglismaal; alustati suurte gooti stiilis katedraalide ehitamist; tekkisid ja hakkasid kiiresti arenema ülikoolid Bolognas, Pariisis, Napolis, Oxfordis ja mujal; ristisõjad tõid palju muutusi inimeste eludesse, sest kohtuti intellektuaalselt palju arenenuma Oriendiga. Lugematud reisijad liikusid Itaalia ja Egiptuse, Väike-Aasia, Süüria ja Bagdadi vahel ja mõned julgemad käisid isegi Indias ja Hiinas. Paljude muude kingituste kõrval, mida Orient Oksidendile andis, oli kindlasti teadmised kõige tähtsamad, eriti aga araabia ja hindu matemaatika.

Üks nendest paljudest reisijatest oli ka Fibonacci, kes oma reisidel nägi Egiptuse ja Väike-Aasia turgusid ja kus ta saigi oma nimeks Fibonacci. Nende reiside käigus uuris ta hoolikalt inimeste kombeid ja nende arvutusmeetodeid. Ta taipas kohe araabia numbrite üleolekut kohmakatest rooma numbritest rehendamises, milles oriendi kaupmehed olid üliosavad. Nii otsustaski ta asja endale selgeks teha ja hiljem koju jõudnult avaldada raamatu sellest uuest süsteemist. Nii sündiski 1202. a *Liber Abaci*, mis polnud küll esimene raamat

¹ Fibonacci nime saab tõlgendada kui poega Bonacci suguvõsas.

oriendi numbritest, kuid kuna see oli väga põhjalik ja paljude näidetega, siis selle raamatu mõju oli võimas.

Fibonacci sündis arvatavasti Pisas, kuid oma hariduse sai ta Põhja-Aafrikas, kus ta isa Guilielmo Bonaccio oli kaupmees ja notar tolliametis, esindades Pisa vabariigi kaupmehi Bugia linnas, mis praegu on Béjaïa Alžeeria kirdeosas. Linn paikneb Soummami jõe suudmes Gouraya mäe ja Carboni neeme lähedal. Fibonacci nimetas end vahetevahel ka Bigolloks, millel on kaks tähendust: tühikargaja või rändaja. Arvatavasti pidas Fibonacci siiski silmas rändamist, sest on teada, et ta külastas ärireisidel Egiptust, Süüriat, Sitsiiliat ja Provanssi. Neid reise oli palju, enamasti koos isaga, ja neil reisidel uuris Fibonacci külastatavates maades kasutatavaid matemaatilisi süsteeme. Nii sai ta selgeks ka india üheksa sümbolit, nagu ta numbreid nimetas.

Fibonacci lõpetas oma reisimise umbes 1200. aasta ringis ja pöördus tagasi Pissasse. Seal ta kirjutas mitu raamatut, millest on säilinud vaid neli.

Ülejäänud raamatute kadumises on süüdi ka asjaolu, et trükikunsti polnud veel leiutatud ja raamatuid kirjutati käsitsi. Järjekordse eksemplari saamiseks tuli kogu raamat ümber kirjutada.

Need säilinud neli on *Liber abaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225) ja *Liber quadratorum* (1225)². Neist kõige olulisemaks peetakse raamatut *Flos*. Kuid kadunud on näiteks kommertslikku aritmeetikat kirjeldav raamat *Di minor guisa* (Väikestest teedest). Samuti on kadunud tema kommentaarid Eukleidese elementide kümnenda raamatu kohta, milles olid numbrilised tehted irratsionaalsete arvudega. Selliste arvude juurde oli Eukleides jõudnud geomeetrisest vaatekohast. Võiks arvata, et Fibonacci elas pimedal keskajal, kus teadustest hooliti vähe. Tegelikult lugu päris nii ei olnud, sest kaupmehed on olnud tegevuses ja au sees aegade algusest. Ning neil on vaja tunda matemaatikat ja tunda seda hästi, et ikka kasudega kaubelda saaks. Seepärast polnud Fibonacci oma töödega sugugi unustatud. Tõsi, enamasti

² Vastavalt Abakuse raamat, Geomeetria praktika, Lill ja Ruutude raamat.

oldi huvitatud Fibonacci matemaatika praktilistest külgedest, mitte tema abstraktsetest teoreemidest. Fibonacci oli Jordanuse³ kaasaegne, kuid ta oli palju targem matemaatik.

Püha Rooma riigi keiser sel ajal oli Frederick II, kes krooniti Saksamaa kuningaks 1212. a ja novembris 1220 kroonis paavst⁴ ta Roomas Püha Peetruse katedraalis Püha Rooma riigi keisriks.

Keiser toetas Pisat konfliktis Genuaga merel ning Lucca ja Firenzega maal ning ta tegeles ka usinalt oma võimu konsolideerimisega Itaalias, seades sisse riiklikku kontrolli kaubanduses ja tööstuses. See aga nõudis asjatundjaid ning keiser asutas selleks 1224. a Napoli ülikooli.

Frederick II sai teada Fibonaccist oma õukonna õpetlaste kaudu. Nende hulgas olid ka Michael Scotus⁵ – õukonna astroloog, Theodorus Physicus – õukonna filosoof ja Dominicus Hispanus, kes soovitasid keisrile kohtumist Fibonacciga. Veel üks keisri õukonna liige Palermo Johannes koostas hulga ülesandeid ja saatis need väljakutsena Fibonaccile, kes lahendas kolm neist ära oma raamatus *Flos* ja saatis selle keisrile.

Pärast 1228. a on teada vaid üks dokument, milles on Fibonacci nimi mainitud. See on Pisa vabariigi otsus maksta palka tõsisele ja õpetatud meister Leonardo Bigollole selle eest, et ta osutas linnale teene, õpetades linna kodanikele rehendamist.

Vaatame nüüd, mida Fibonacci kirjutas raamatus *Liber abaci*, mis oli pühendatud Scotusele. Kõigepealt tõi Fibonacci selles raamatus sisse positsioonilised hindu-araabia numbrid, asendades kohmakad ja

³ Jordanus de Nemore (ca 13. sajand) oli Euroopa matemaatik ja teadlane. Nime järgi otsustades oli ta itaallane (metsast). Tema isikust ei teata peaaegu mitte midagi. Ta kirjutas traktaate vähemalt kuuel tähtsal matemaatilisel teemal: kaalude teadus, praktiline aritmeetika, puhas aritmeetika, algebra, geomeetria ja stereograafiline projektsioon. Enamus neist traktaatidest on mitmes versioonis, ümbertöötatutena keskajal.

⁴ Aastatel 1216 kuni 1227 oli paavstiks Honorius III (? - 1227), keda peetakse ajaloos üheks suurtest administraatoritest. Olles Rooma aristokraat, sai ta Vatikani laekuriks 1188. a.

⁵ Michael Scotus (1175 – ca 1232) oli keskaja šoti matemaatik ja õpetlane. Ta sai hariduse Oxfordis ja Pariisis ning töötas Bolognas ja Toledos, kus ta õppis araabia keelt. Tema patroon oli Püha Rooma riigi keiser Frederick II, kelle juures Scotus teenis teadusnõunikuna ja õukonna astroloogina. Scotus tõlkis Averroese töid ja oli omal ajal suurim avalik intellektuaal, keda Dante oma *Jumalikus komöödias* määras põrgusse kui võluri, kes jäädvustab maagilisi pettuseid.

rehkenduseks kõlbmatud rooma numbrid. Raamatu teine osa sisaldas mitmeid ülesandeid, mis olid orienteeritud kaupmeestele. Aga kolmas osa viis lugeja kohe nn Fibonacci arvudele ja Fibonacci reale ülesandega küülikutest, mis kõlab nii:

Üks mees pani 1. jaanuaril täiskasvanud isase ja emase küüliku kinnisesse ruumi. Kui oletada, et iga küülikute paar saab ühe kuuga uue paari – emase ja isase küüliku, siis kui mitu paari küülikuid saadakse niiviisi aasta lõpuks⁶?

Kui nüüd järele mõtelda, siis küülikute paaride arv hakkab kasvama sellise rea järgi: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Rida on lihtsasti leitav, sest iga liige (alates kolmandast) on kahe eelmise liikme summa.

Küülikute probleem pole kaugeltki ainus, kus ilmnevad Fibonacci arvud.

Nad ilmnevad ka päevalilles, kus seemned on paigutatud spiraali õie keskosast väljapoole. Kui me vaatame mõnd päevalille õit, siis võib lugeda seemnete vasakule pöörduvaid paigutusspiraale 55 tükki ja paremale pöörduvaid 34.

Peaaegu alati on need arvud naabrid Fibonacci reas.

Ilmselt on see seemnete pakkimise optimaalne meetod, sest nii on seemned pakitud alati nii, et hoolimata nende suuruselt ja arenemisjärgust on nad alati ühtlaselt pakitud⁷.

Sama saab öelda ka taimede õielehtede kohta. Hämmastav on siinkohal see, et vaadeldud spiraali pöörlemisnurk saab olla õielehtede või seemnete paigutamiseks optimaalne, hoolimata taime kasvustaadiumist. Matemaatiliselt tõestasid selle printsiibi prantsuse matemaatikud Stéphane Douady ja Yves Couder 1993. a. Kui taim kasutab uue seemne või õielehe paigutamiseks minglile suunale 0.618 osa pöördest, siis see on parim võimalikest paigutustest. Kust see arv tuleb? Osutub, et kuldlõikest.

Matemaatikas on kaks arvu a ja b kuldlõikes, kui nende summa suhtub suuremasse arvu a nagu suurem arv a suhtub väiksemasse b ,

$$(a + b) / a = a / b.$$

⁶ Seejuures peetakse silmas, et ükski küülik aasta jooksul ei sure. Ülesande vastuseks on 203 paari küülikuid.

⁷ Sageli on pakutud sellise paigutuse näiteks ka limuste spiraalselt keerdunud kodusid. Kuid sel puhul pole siiski tegu Fibonacci reaga, vaid logaritmilise spiraaliga.

Kui defineerime $\varphi = a / b$, siis saame ruutvõrrandi, mille lahendid on $\Phi = 1.618\ 033\ 988\ 749 \dots$ ja $\varphi = -.618\ 033\ 988\ 749\dots$.
Kuldloike⁸ defineerib siis arv Φ . See number on irratsionaalne arv.

Tüüpiliseks Fibonacci arve vajavaks ülesandeks on ka selline, kus näiteks tigu ronib öösel üles mööda müüri mingi vahemaa ja päeval libiseb mingi osa sellest alla. Küsimuseks on, et mitme ööga jõuab tigu müüri peale.

Leonardo raamat *Practica geometriae* (1220) on pühendatud Dominicus Hispanusele. Selle kaheksas peatükis on suur hulk geomeetria probleeme, mis baseeruvad Eukleidese töödele *Elemendid* ja *Jagamistest*. Neis on lisaks geomeetrilistele teoreemidele, mis on varustatud täpsete tõestustega, veel ka praktilist informatsiooni maamõõtjatele.

Raamatus *Flos* annab Fibonacci kaunis täpse ligikaudse numbrilise lahendi kuupvõrrandile

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0,$$

mille esitas Fibonaccile väljakutseks Palermo Johannes, kes oli võtnud selle ülesande Omar Khayyami algebra raamatust, kus Omar oli selle võrrandi ainsa reaalse lahendi leidnud ringi ja hüperbooli lõikumispunkti lähendina.

Fibonacci ei selgita oma lahendusmeetodit, kuid annab ainsaks reaalseks lahendiks $x = 1.3688081075\dots$ ⁹, mis on hämmastavalt täpne kuni üheksanda kümnendkohani.

Fibonacci avaldab raamatu *Liber quadratorum* 1225. a ja see on Fibonacci kõige mõjukam raamat, sisaldades peatükke arvuteooriast, kus muuseas on juttu ka Pythagorase teoreemist ja teoreemi sobivate ruutarvude leidmisest. Ta paneb esimesena tähele, et neid saab esitada paaritute arvude summana, kasutades valemit

⁸ Keskkoolis õpetati meile, et kuldloikeks nimetatakse seda suurust sellepärast, et kui näiteks raamatu lehekülje või maja ukse möödud suhtuvad nagu kuldloige, siis olevat see silmale kõige meeldivam. Enam sellist juttu ei aeta.

⁹ WolframAlpha annab lahendiks $x_1=1.36880810782137$, $x_2=-1.68440405391069+3.43133135019769i$ ja $x_3=-1.68440405391069-3.43133135019769i$.

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Fibonacci õpetab, kuidas Pythagorase kolmikuid leida. Tuleb võtta mingi paaritu arvu ruut, näiteks 25 ja liita kokku kõik paaritud arvud 25ni: $1 + 3 + 5 + \dots + 23 = 144$ ehk 12^2 . Siis $25 + 144 = 169 = 13^2$.

Selles raamatus tõestab Fibonacci mitmeid arvuteooria teoreeme ja nagu *Encyclopaedia Britannica* ütleb,

... *Liber quadratorum* üksi asetab Fibonacci arvuteooriasse põhipanustajaks Diophantos'e ja 17. sajandi prantsuse matemaatiku Pierre de Fermat vahele.

Sellest hoolimata olid Fibonacci tööd arvuteoorias peaaegu täielikult unustatud ja keskajal tegelikult tundmatud. Ja alles 300 aastat hiljem me leiame samad tulemused Maurolico¹⁰ töödes.

Viimane kord, kui Fibonacci nimi on dokumendis esinenud, on 1240. a, kui Pisa vabariik oli maksnud Fibonaccile honorari 20 Pisa naela pluss muud kulud teenete eest linnale.

Fibonacci kodulinna Pisa allakäik algas merelahinguga Meloria¹¹ saarekese juures Liguuria meres 5. ja 6. augustil 1284. a, kui Genua vabariigi laevastik purustas Pisa laevastiku.

Uhke kirjutus Pisa “kuldse” mereväraval – Armastage õiglust, teie maavalitsejad – muutus vaid kadunud hiilguse nostalgiliseks mälestuseks.

Arvatakse, et Fibonacci suri Pisas 1240. ja 1250. aasta vahel. Fibonacci kuju püstitati Pisas 19. sajandil. Tänapäeval on see kuju Camposantos, mis on ajalooline kalmistu Piazza dei Miracoli'l (Imede väljakul).

Palju matemaatilisi mõisteid on Fibonacci järgi nimetatud, nagu näiteks Brahmagupta-Fibonacci identsus, Fibonacci otsimistehnika, Pisano periood.

¹⁰ Francesco Maurolico (1494 - 1575) oli matemaatik ja astronoom Sitsiiliast. Ta andis panuse geomeetrias, optikas, koonuslõigete teoorias, mehhaanikas, muusikas ja astronoomias. Ta toimetas klassikaliste autorite töid, kaasa arvatud Archimedes, Apollonius, Autolycus, Theodosius ja Serenus. Ta kirjutas ka enda unikaalseid traktaate matemaatikas ja matemaatilistes teadustes.

¹¹ Meloria on majakaga varustatud ja madalikuga ümbritsetud kaljune skäär Toscana rannikul Liguuria meres 5.6 km Livornost loodes.

Lisaks on veel asteroid 6765 *Fibonacci* ja kunstilise roki ansambel *The Fibonacciis*.

Kasutatud allikad

<https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci>
https://archive.org/stream/jstor-2974039/2974039_djvu.txt
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fibonacci/>
<https://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/fibo.html>
https://en.wikipedia.org/wiki/Hindu%E2%80%93Arabic_numeral_system
<https://plus.maths.org/content/life-and-numbers-fibonacci>
<https://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/fibo.html>
<http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28191901%2926%3A1%3C1%3ALOPAHL%3E2.0.CO%3B2-U>