

KOLME KEHA PROBLEEMI LAHENDAJA KARL FRITIOF SUNDMAN

T. Viik

1. Sissejuhatus

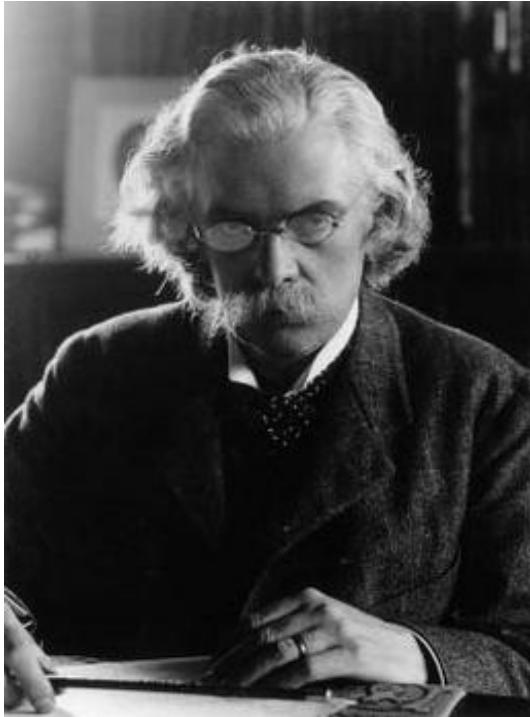
Kahekümnenda sajandi alguses lahendas peaegu tundmatu soome matemaatik-astronoom Karl Fritiof Sundman kolme keha probleemi, mida üks suuremaid toleaegseid matemaatikuid Henri Poincaré oli pidanud lahendamatuks. Ülesanne ise on väga lihtne - me teame kolme keha koordinaate ja kiiruseid mingil ajahetkel ning me peame leidma Newtoni gravitatsiooniteooriat kasutades lahendi, mis võimaldab meil leida nende kolme keha asukohti ja kiiruseid mistahes ajahetkel.

Tõsi ta on, et Sundman leidis lahenduse ridadena, mis koonduvad niivõrd aeglaselt, et kui soovida ainult vaatlustel saadavat täpsust, tuleb nendes ridades arvestada $10^{8000000}$ liiget! Seega pole lahendil mingit praktilist väärtust, kuid põhimõtteliselt on selle tähtsus väga suur. Ja seda just viimasel ajal, kui kaose teooria on kilbile tõstetud.

2. Veidi matemaatika ja astronoomia seisust Soomes 19. sajandi lõpus ja 20. sajandi alguses

1828.a. avati Soome uues pealinnas Helsingis Keiserlik Aleksandri ülikool, mis tegelikult oli 1640. aastal asutatud Åbo Akademi järglane. Kuid see ülikool oli hävinud 1827.a. Turu linna suures tulekahjus, kus põles ära ligi kolmveerand linnast. Helsingi ülikoolis töötas läbi kogu 19. sajandi ja 20. sajandi alguse matemaatika kateeder, mis koosnes ühest professorist ja ühest-kahest dotsendist. Pikka aega oli seal professoriks sama ülikooli kasvandik Lorenz Lindelöf (1857-1874), kes oli suurt tunnustust leidnud variatsioonarvutuse alal, kuid kellel oli ka astronoomia alaseid publikatsioone ning ta oli kahel korral astronoomia professorit asendanud. 1877.a. valiti rootsi matemaatik Magnus Gösta Mittag-Leffler Lindelöfi järglaseks. Selle järglaseks saamisega oli olnud kõvasti tegemist, sest Mittag-Leffler oli ju välismaalane, kelle jaoks tuli taotleda vabastamist soome keele oskuse nõudest. Aga Lindelöf seisis kui lõvi tema eest ja kui senat lõpuks valimised korraldas, siis võitis Mittag-Leffler väga napilt Ernst Bonsdorffi ees.

Mittag-Leffler tegeles mitmesuguste probleemidega, milledest võiks esile tõsta diferentseerimis- ja integreerimisoperaatorite üldistamist. Kuid matemaatika ajalukku



Magnus Gösta Mittag-Leffler

jääb ta ennekõike ajakirja *Acta Mathematica* asutamisega. See sündis kuningas Oskari ja ka Mittag-Leffleri abikaasa Signe Lindfors'i rahalisel toel. Ajakirja esimestes numbrites olid artiklid kuulsatelt matemaatikutelt Poincaré'lt ja Cantorilt, kuna Mittag-Leffler neid isiklikult tundis. Kuni selle ajani olid soome matemaatikud avaldanud oma töid ajakirjas *Acta Societatis Scientiarum Fennica* (*Soome teadusseltsi toimetised*), mis oli siiski jäänud provintsslikuks, mida matemaatikamaailma suured ei tundnud.

Ei saa sugugi märkimata jätta, et Mittag-Leffler kasvatas hulga noori matemaatikuid, nende hulgas Hjalmar Mellini, kelle ta viis Berliini õppima Weierstrassi käe alla. Ainuüksi see suurendas oluliselt soome matemaatika nähtavust maailmas, rääkimata mõjust, mida avaldasid Skandinaavia (hiljem Põhjala) matemaatikute kongressid, mis samuti toimusid Mittag-Leffleri ettevõtmisel.

Kuigi Mittag-Leffler töötas Helsingis vaid neli ja pool aastat, jäi ta Soomega tihedalt seotuks, eriti aga Lorenz Lindelöfiga. Mittag-Leffleri järglasteks kandideerisid Edvard Neovius ja Edvard Bonsdorff, kuid kuna Bonsdorff end taandas, siis kateedrijuhatajaks valiti Neovius, kelle vennad oma perekonnanime hiljem soomendasid Nevanlinnaks. Neovius oli õppinud Zürichis Herman Amandus Schwarzi juures, mistõttu ka Neovius hakkas õpetaja eeskujul tegelema



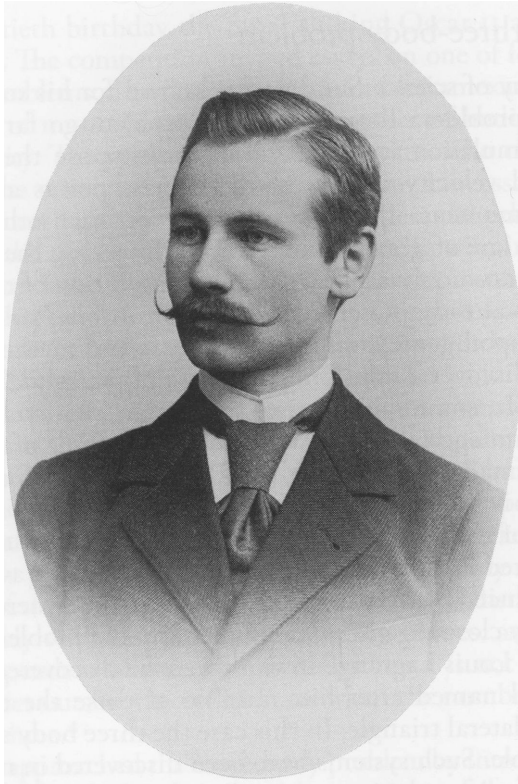
Hugo Gylden

minimaalsete pindade uurimisega. Neovius lahkus kateedrijuhataja kohalt Soome rahandusosakonna juhatajaks aastal 1900 ja kateedril tuli otsida uus juht.

Samal aastal, kui Neovius valiti matemaatikakateedri juhatajaks, valiti astronoomiakateedri ja tähetorni juhatajaks Anders Donner, kes oli oma hariduse saanud küll Helsingis, kuid hiljem end doktoritöös täiendanud Berliinis Weierstrassi juures ja kirjutanud doktoritöö elliptilistest funktsioonidest. Enne professoriks valimist oli ta töötanud Hugo Gyldeni juures Stockholmis, kus ta käsitles häirituste teooriat.

Pärast Neoviust valiti matemaatikakateedri juhatajaks Ernst Lindelöf (Lorenzi poeg), kes oli oma doktoritöö kirjutanud Lie transformatsioonirühmadest. Ta oli õppinud mitmes Lääne-Euroopa ülikoolis, nagu Stockholmis, Pariisis ja Göttingenis, niiviisi sõlmides tutvusi Mittag-Leffleri, Paul Painlevé ja Emil Boreliga. Tema tööd funktsioonide teoorias olid nii olulised, et 1907.a. valiti ta *Acta Mathematica* toimetusse.

Põhiliselt taevamehaanikaga tegelenud Hugo Gyldeni saab nimetada Soome astronoomiks vaid tinglikult, sest ta küll õppis Helsingis ja oli ka mõnda aega astronoomiadotsendiks Helsingi ülikoolis, kuid oma põhilise teadlaseteel läbis ta siiski Stockholmis. Doktoritöö oli ta kirjutanud Saksamaal Gothas parima tolleaegse taevamehaaniku Peter Hanseni juures, kuigi ta oli enne Pulkovos uurinud Maa



Karl Fritiof Sundman

atmosfääri refraktsiooni, ja seda väga edukalt. Ometi oli tal Soome astronoomiale suur mõju, kasvõi sellepärast, et ta oli olnud Anders Donneri õpetaja, rääkimata suurest abist Sundmani tööde publitseerimisel.

3. Elulugu kokkuvõtlikult

Karl Fritiof Sundman sündis 28. oktoobril 1873 Soome väikelinnas Kaskises Botnia lahe kaldal tolliametniku perekonnas. Vanemad - isa Johan Fritiof Sundman ja ema Adolfina Fredrika Rosenqvist - soovisid, et pojast saaks kalur. Siiski seda ei juhtunud, sest Karl Fritiof ei sobinud selle ameti jaoks, mistõttu tema vanemad olid Karli tuleviku pärast lausa mures. Kuid poiss huvitus õpingutest ja kui ta enamalt jaolt iseõppijana oli vajaliku haridustaseme saavutanud, siis astus ta Keiserlikku Aleksandri ülikooli Helsingis täppisteadusi õppima. Lisaks sellele oli ta aastatel 1894-1897 assistendiks Helsingi astronoomiaobservatooriumis astrofotograafia osakonnas. Ja 8. mail 1897 sai ta filosoofiakandidaadiks. Kuid see teaduskraad ei kestnud kaua, sest sama kuu 31. päeval promoveerus ta filosoofiamagistriks (küll

täpsustava lisamärkusega "ultimus". Parim lisamärkus oleks olnud "primus" ja "ultimus" oli paremuselt teisel kohal). Aastatel 1897 kuni 1899 jätkas ta õpinguid Pulkovo observatooriumis Oskar Backlundi assistendina, kes siis oli Pulkovo observatooriumi direktor ja keda Sundman abistas Hugo Gyldéni monumentaalse, suurte planeetide orbiitide häiritusi käsitleva uurimuse lõpetamisel. Samal ajal kirjutas ta Backlundi juhendamisel oma väitekirja. Aastal 1899 pöördus Sundman Helsingisse ülikooli tagasi. Ta sooritas litsensiaadieksami 29. mail 1901, olles enne seda 25. mail esitanud dissertatsiooni "*Über die störungen der kleinen Planeten, speciel derjenigen, deren mittlere Bewegung annähernd das doppelte Jupiters beträgt*". Selles töös seadis Sundman endale ülesandeks kindlaks teha väikeplaneetide orbiitide häiritused eriti just sellistel planeetidel, mille orbiidid võrreldes Jupiteri omaga on spetsiifilist laadi, kuid Sundmani meetodit sai kasutada ka mittespetsiifiliste orbiitidega planeetide puhul. Rootsi astronoom von Zeipel kirjeldas Sundmani meetodit Kleini entsüklopeedias kui väljapaistvat. Doktorikraadi sai Sundman 22. aprillil 1903 ilma dissertatsiooni kaitsmata. Kuid juba enne seda, 13. märtsil 1902 nimetati ta astronoomiadotsendiks ikka samas Keiserlikus Aleksandri ülikoolis Helsingis.

Järgnevad aastad, 1903-1906, veetis ta Rosenbergi stipendiaadina astronoomiaalaseid uuringuid tehes Göttingenis, Pariisi, Münchenis, Leipzигis ja Berliinis (Rosenbergi reisigrandi asutas Vaasa maakonna kuberner Herman Rosenbergi abieluväline poeg H.F. Antell oma isa mälestuseks). Ja 1907.a. 14. novembril nimetatakse Sundman erakorraliseks astronoomiaprofessoriks ning 5. jaanuaril 1918 saab ta korraliseks professoriks ja ühtlasi observatooriumi direktoriks nüüd juba iseseisvunud Soome Helsingi ülikoolis. Tegelikult oli ta olnud sellest ajast, kui professor Anders Donner oli saanud ülikooli rektoriks, korralise astronoomia professuuri täitja. Kui Donner sai ülikooli kantsleriks 1915. aastal, siis nii astronoomiakateedri juhataja kui observatooriumi direktori kohad jäi vakantseteks. Nendele kohtadele esitasid kolm kandidaati oma dokumendid: Karl F. Sundman, Ilmari Bonsdorff ja Ragnar Furuhejm. Kaks viimast olid vaatlejad ja Sundman, teadagi, teoreetik. Sundman valiti vakantsetele kohtadele, kuid kaks kandidaati ei olnud otsusega rahul ja esitasid kaebuse. Küsimus oli poliitilist laadi - kas eelistada teoreetikut või vaatlevat astronoomi. Valimiskomisjon lahendas selle probleemi elegantselt nii, et Sundman jäi valitud kohtadele, Furuhejmile loodi uus kateeder ning Bonsdorff sai värskest asutatud geodeesia instituudi juhiks. Sundman oli

observatooriumi direktor ja astronoomia professor Helsingi ülikoolis kuni 31. maini 1941. Ta suri 28. septembril 1949 pärast väga pikka haigust.

4. Sundmani reisirid

Nagu juba öeldud, reisirid Sundman Lääne-Euroopa teaduskeskustesse Rosenbergi granti toel. Reisirid oli ette võetud tegelemiseks probleemiga "*Väikeste planeetide ja nende kuude liikumise uurimine, eriti Saturni kuude oma, selleks et käsitleda häirivate ja häiritavate kehade ühismõõduliste keskmiste liikumiste lähedasi juhtumeid*".

Nagu Sundman ise väitis, oli ta saanud innustust selle probleemiga tegelemiseks Gyldéni tööst planeetide süsteemi stabiilsuse uurimisel. Gyldén oli selleks kasutanud elliptilisi funktsioone, kuid ebaõnnestunult. Sundman lootis abi saada tavalistest trigonomeetristest funktsioonidest, lisades kavalal kombel oma taotlusesse mõtte kasutada ka funktsioonide teooriat. See vihje ei jäänud tähelepanuta ülikooli komitee liikme, Sundmani kolleegi Ernst Lindelöfi poolt, kes teatavasti just funktsioonide teooriaga tegeles!

Sundman lootis Pariisis kohata Poincaréd, Paul Appeli, Paul Painlevéd ja Octave Callandreaud ja Münchenis Hugo von Seeligeri. Kuigi Sundman tõepoolest kohtus paljude matemaatikute ja astronoomidega oma reisiril, on tema aruandes juttu vaid Poincarést ja Gyldénist. Kuna ta aga pidas kirjavahetust Donneriga, siis nendest kirjadest selgub palju rohkem kui ametlikust aruandest. Näiteks Poincaréga vestles ta kolme keha probleemi lihtsamatest juhtudest võimalike singulaarsustega.

13. aprillil 1904 valitakse Sundman *Société Mathématique de France* liikmeks, kusjuures teda esitasid Painlevé ja Borel. Barrow-Green arvab, et Boreli esitus tuli tegelikult Lindelöfi kaudu, sest need kaks meest olid suured sõbrad.

Göttingenis kohtus Sundman Karl Schwarzschildiga, kes pani talle ette kirjutada artikkel astronoomiast Kleini monumentaalsesse teosesse *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihre Anwendungen*, kus Schwarzschild ja Oppenheim olid astronoomia osa toimetajad.

Münchenis oli tal kasulik vestlus von Seeligeriga ja Leipzigin kohtus ta Heinrich Brunsiga, kes tollal oli astronoomia professor ja observatooriumi direktor ning kes oli avaldanud olulise töö kolme keha probleemist.

1905.a aprilli lõpus sõitis Sundman Paduasse kohtuma Levi-Civita'ga, kuigi seda sõitu tema ametlik sõiduplaan ette ei näinud. Tema sõidu eesmärk oli arutleda kahe nädala jooksul kuulsa matemaatikuga kolme keha probleemi üle.

5. Kolme keha probleemi ajalugu

Nagu juba öeldud, on kolme keha probleemi püstitus imelihtne: meil on kolm gravitatsiooniliselt seotud keha, mille koordinaadid ja kiirused mingil hetkel on teada. Tuleb leida nende kehade koordinaadid ja kiirused mistahes ajahetkel. Muidugi on matemaatilise ülesandena kehad ainult masspunktid, kuid isegi selline lähenemine on väga hea lähendus tegelikule olukorrale astronoomias, kus kehadel on nii mass kui mõõtmed.

Probleem selle traditsioonilises mõttes sai alguse 1687. aastal, kui Newton oma *Principia* avaldas. Järgmine kuulsus, kes kolme keha probleemiga tegeles, oli Leonard Euler. Ta käsitles probleemi sel juhul, kui kolmanda keha mass on väga väike teiste kehadega võrreldes. Hiljem andis Poincaré sellele juhule piiratud kolme keha probleemi nime. Peaaegu samal ajal uuris kolme keha probleemi Joseph Louis Lagrange, kes lahendas mitmeid erijuhtumeid, millest üks on järgmine: kui kolm keha asuvad võrdkülgse kolmnurga tippudes, siis on selline konfiguratsioon stabiilne. Päikesesüsteemis ongi selline juhtum realiseerunud, nimelt kaks asteroidide rühma, mis liiguvad samal orbiidil kui Jupiter, kuid 60 kraadi temast eespool ja 60 kraadi tagapool. Ka Carl Jacobi ja Henri Poincaré tegelesid põhjalikult kolme keha probleemiga, eriti Poincaré. Kuid üldlahendit ei leidnud kumbki ja Ernst Bruns ning Henri Poincaré tõestasid hoopiski, et sellel probleemil puudub üldine analüütiline lahend, mida saaks avaldada algebraliste avaldiste ja integraalide kaudu. Samuti on gravitatsiooniliselt seotud kolme keha liikumine üldjuhul mitteperioodiline. Ent lahendi otsimine jätkus, isegi hoolimata Poincaré mõttest, et selle probleemi täieliku lahenduse leidmine näib väga kaugena.

Kui Rootsi kuningas Oscar II, kes oli ise matemaatikat õppinud, kuulutas oma 60. sünnipäeval 1889.aastal välja esseede võistluse nelja funktsioonide teooria probleemi kohta, millest üks käsitles suvalise arvu kehade liikumist gravitatsiooni mõjul, siis leidis auhinnakomisjon (Mittag-Leffler, Hermite ja Weierstrass), et Poincaré, kes oli vaadelnud piiratud kolme keha probleemi, on võitja ja saab

auhinnaks kuldmedali ja 2500 rootsi krooni, kuigi ta ei leidnud üldlahendit. Ometi oli ta avanud ukse dünaamiliste süsteemide teooriale. Auhinna reglemendi kohaselt pidi võitja töö avaldatama ajakirjas *Acta Mathematica*. Artikli toimetamise ajal esitas *Acta Mathematica* kaastoimetaja E. Phragmén autorile küsimuse, mille tulemusena selgus, et suur osa Poincaré tööst oli vale. Autor muidugi parandas töö, avastades seejuures midagi täiesti uut, nimelt homokliinsed punktid, kuid ajakirja number oli vahepeal trükitud ja osa eksemplaridest trükikojast väljagi saadetud. Skandaali vältimiseks otsustas Mittag-Leffler kogu tiraaži hävitada ja uuesti trükkida. Uue tiraaži pidi Poincaré kinni maksma - 3585 krooni ja 63 ööri (selgituseks olgu öeldud, et Mittag-Leffleri aastapalk 1881.a. oli 7000 krooni).

Matemaatiliselt ei näi kolme keha probleem sugugi keerulisena - tegu on üheksa teist järku tavalise diferentsiaalvõrrandi lahendamisega, mida saab hamiltoniaani kaudu kirjeldada 18 esimest järku tavalise diferentsiaalvõrrandiga. Raskusi valmistab seejuures asjaolu, et meil on ainult kümme sõltumatut algebralist integraali: kuus integraali süsteemi masskeskme liikumise kohta, kolm integraali impulssmomendi jaoks ja energiantegraal. Nende integraalide abil saab süsteemi lihtsustada üheks kuuendat järku tavaliseks diferentsiaalvõrrandiks, kuid mitte enam.

Kui matemaatikud olid aru saanud, et üldist analüütilist lahendit sellel probleemil pole, hakati lahendit otsima lõpmatute ridade kujul (nn Frobeniuse meetodil). Lõpuks selline lähenemine viiski sihile, kuid see võttis aega, sest raskusi valmistasid põrked kehade vahel. Matemaatiliselt kujutavad kehade põrked endast singulaarsusi diferentsiaalvõrrandites, ja seega tuli leida meetod nende singulaarsuste kõrvaldamiseks. Pealegi polnud alguses selge, kas põrgete kõrval on olemas veel mingit tüüpi singulaarsusi.

1886. aastal leidis Poincaré, et kui teaksime ette, et mistahes kahe keha kaugus (kolme keha probleem) on suurem, kui mingi ette antud piir, siis saab kolme keha koordinaate arendada koonduvasse ritta mistahes ajahetke jaoks. Häda oli aga selle piiri leidmisega.

Siis näitas 1895.a. Painlevé, et ainsad singulaarsused kolme keha probleem) on põrked ja et probleemi saab lahendada, kui probleemi algtingimused välistavad igasugused põrked nende kehade vahel. Muidugi hakati selliseid algtingimusi otsima ja Levi-Civita leidis Painlevé lahendi piiratud kolme keha probleemi jaoks. Teine Itaalia matemaatik Giulio Bisconcini leidis üldise kolme keha probleemi jaoks kaks algtingimusi siduvat analüütilist valemit, mis lubasid kindlaks teha singulaarse

trajektoori, so mingi pörke lõpliku aja jooksul. Ometi ei lahendanud see üldist kolme keha probleemi.

Siinkohal tahaksin lisada viite Martin C. Gutzwilleri artiklile vanimast kolme keha probleemist astronoomias, mis meile teadaolevalt sai alguse umbes 3000 aastat tagasi Mesopotaamias, nimelt süsteemist Kuu-Maa-Päike. Selles artiklis antakse põhjalik ülevaade Kuu liikumist kirjeldavatest teooriatest ja nende arengust läbi aegade.

6. Sundmani lahendus

Sundman jõudis kolme keha probleemini Päikesesüsteemi stabiilsuse uurimise kaudu. Barrow-Green analüüsib oma üksikasjalises artiklis Sundmani huvi kasvu selle probleemi vastu ja ka seda, kuidas ja kust ta õppis seda matemaatikat, mida tal läks vaja probleemi lahendamiseks. Ilmselt tuleb alustada sellest, et Sundman oli võimekas matemaatik juba oma karjääri alguses. Ja see, et ta pidi ennast läbi "närima" Gyldéni *Magnum opusest*, kui ta Pulkovos töötas, aitas tublisti tema matemaatiliste võimete kasvule kaasa.

Kui Sundman oli taas Helsingis, siis pole kahtlust, et sõprus temast kolm aastat vanema Ernst Lindelöfiga, kes oli vast Soome parim kompleksfunktsioonide teooria tundja, tuli Sundmanile suureks kasuks. Seda tunnistab Sundman ka ise oma 1909. aasta töös, kus ta avaldab Lindelöfile tänu mitmete tõestuste lihtsustamise eest. Sundmanile oli palju abi ka Lindelöfi rikkalikest tutvustest nii Rootsis kui ka Saksamaal ning Prantsusmaal.

Oma esimese töö kolme keha probleemist avaldas Sundman Soome teadusseltsi toimetistes 1907.a. Kaks aastat hiljem järgnes samas tema teine artikkel ja samuti 1909.a. esines Sundman Skandinaavia matemaatikakongressil ettekandega kolme keha probleemist. Kaht esimest artiklit kokkuvõttev artikkel ilmus Mittag-Leffleri asutatud ajakirjas *Acta Mathematica*.

Sundmani lahenduse juures on oluline, et ta vaatles mitte nagu tavaliselt kahe keha pörkeid, vaid kohe kolme keha pörkeid, st tekkivaid singulaarsusi. Seejuures formuleeris ja tõestas ta lahenduseni jõudmiseks väga vajaliku teoreemi, et kui kõik kolm impulssmomendi integraali on nullid, ainult siis saavad kolme keha pörked toimuda. Juhul kui kõik kolm integraali pole nullid, siis saab näidata, et on olemas positiivne suurus, millest väiksemaks suurim kehade vahelistest kaugustest muutuda

ei saa. Lisaks sellel tegi Sundman kindlaks, et kui ainult kaks keha pörkuvad, siis ühe keha nurkkiirus teise ümber on lõplik.

Oma 1909.a. töös tõestas ta teoreemi, et kui kolme keha kõik kolm impulssmomenti pole nullid, siis on võimalik leida selline muutuja τ (Poincaré eeskujul, muide), et kehade koordinaate, nendevahelisi kaugusi ja aega saab avaldada τ suhtes holomorfsete funktsioonidena, täpsemalt koonduvate astmeridadena, mis kirjeldavad kehade liikumist kõikide aja reaalsete väärtuste puhul, ükskõik millised pörkumised kehade vahel ka toimuvad.

See väide sisaldab väga olulist infot - et pärast pörget saab lahendust analüütiliselt jätkata ja et muutuja asendusega saab elimineerida kahe keha pörke puhul tekkiva singulaarsuse. Ja mis veel oli selles lahenduses väga kaval - Sundman läks muutuja τ defineerimisega komplekstasandile. Kuigi sellele üldistusele ei saanud omistada mingit füüsikalist tähendust, oli see ometi väga tähtis lahenduse leidmise koha pealt.

Mis puutub Sundmani tulemuse avaldamisse, siis selles aitasid teda tublisti nii Lindelöf kui ka Mittag-Leffler, eriti Sundmani kolmanda, kokkuvõtliku, artikli avaldamisel Mittag-Leffleri ajakirjas *Acta Mathematica*. See artikkel oli ka määravaks Prantsuse Teaduste akadeemia Pontecoulanti auhinna saamisel. Ja kuna Sundmani töö oli erakordselt tähtis, kahekordistas akadeemia auhinna tavalise suuruse.

On juba öeldud, et oma esimesed tulemused avaldas ta Soome teadusseltsi toimetistes, küll prantsuse keeles, kuid ikkagi rahvusvaheliselt peaaegu tundmatus ajakirjas. Et see nii oli, näitab selgesti Suurbritannia Matemaatika assotsiatsiooni presidendi Sir George Greenhilli kõne 1914.aastal, kus ta ütles, et: "Sundmani dramaatiline episood Helsingforsis peaks julgustama noori matemaatikuid, kui meie uurimisala ammendamatu loomuse näidet ... Kuid kuna Sundmani publikatsioon avaldati soome keeles (sic!) Helsingforsis, siis Poincaréle saadetud koopia jäi tema lauale lugemata ..." Ilmselt polnud Greenhill neid artikleid näinudki, kuigi nende koopiad olid olemas nii Cambridge'is kui Londonis. Kuid on arvata, et Poincaré oli Sundmani töödega tuttav, seda enam, et Sundman temaga Pariisis kohtus. Eric T. Bell kirjutab oma raamatus "Men of Mathematics" ühest huvitavast episoodist seoses Poincaré ja Sundmaniga (Sundmani nime selles episoodis küll ei mainita, siiski pole mingit kahtlust, et tegu oli just Sundmaniga). Keegi matemaatik oli tulnud Soomest ja soovitud Poincaréga teaduslikel teemadel vestelda. Kuigi teenijanna oli Poincaréle öelnud, et tal on külaline, jätkas suur matemaatik õhukeste kardinate taga edasi-

tagasi käimist, sest tema komme oli, et enne ei pane ta ridagi paberile, kui probleem pole peas täielikult ära lahendatud. Järsku pistis ta oma pea kardinat vahelt välja ja käratas Sundmanile: "Vous me dérangez beaucoup!" (Te segate mind tugevasti). Sundman tõusis vaikides ja lahkus. See stseen iseloomustab hästi neid kaht meest, sest üks oli väga hajameelne, kui ta mõtles matemaatilistele probleemidele ja teine oli erakordselt tagasihoidlik.

6. Kuidas Sundmani lahendusse suhtuti?

Barrow-Green jagab Sundmani kolme keha probleemi lahendusse suhtumise nelja perioodi.

Esimeses perioodis - vahetult pärast kaht esimest publikatsiooni Soome teadusseltsi toimetistes - ei pööratud sellele peaaegu mingit tähelepanu. Põhiliselt sellepärast, et nii autor kui ajakiri olid mõlemad matemaatikute rahvusvahelisele seltskonnale tundmatud.

Teine periood algas Sundmani töö avaldamisega ajakirjas *Acta Mathematica*. See ajakiri oli juba tuntud, sest peatoimetaja Mittag-Leffler, kes igal võimalikul juhul propageeris Skandinaavia ja Soome matemaatikat, kutsus paljusid kuulsaid matemaatikuid sellesse ajakirja kirjutama. Tulemuseks oli, et Sundmani lahendust hakati väga kiitma. Saadi muidugi aru, et praktilistes rehkendustes pole sellest lahendusest mingit abi, kuid oluline astronoomiline ja matemaatiline probleem, mille kallal olid vaeva näinud paljud kuulsused, oli saanud lahenduse.

Kolmas periood, mis algas pärast I maailmasõda ja kestis peaaegu 1990. aastate alguseni, tähistas huvi vähenemist klassikalise taevamehaanika vastu. Tundus, nagu Poincaré suuremal määral ja ka Sundman, küll palju madalamal tasemel, olid viinud teoreetilise taevamehaanika sellistesse kõrgustesse, et sinna ei tahtnud enam eriti keegi pürgida. Tõsi, praktilisi taevamehaanika probleeme aitasid oluliselt elustada kosmoselennud.

Neljas periood, mis algas varastel 90-ndatel, tähistas uut huvi kasvu, sest nii kaose teooria kui ka N -keha probleemi käsitlese kiire arenemine andsid tõe Poincaré tööde uurimisele. See omakorda tähendas seda, et ka Sundmani tööd tõusid päevakorda.

See periood jätkub väga huvitavate tulemustega, sest kaks Belgradi ülikooli füüsika instituudi teadlast Milovan Šuvakov and Veljko Dmitrašinović, kes püüdsid

leida kolme keha liikumise perioodilisi trajektoore, leidsidki 13 uut perekonda (kolm perekonda olid enne teada). Kõige varasemad perioodilised orbiidid leidsid Lagrange ja Euler, kuid alles 1970. aastatel USA matemaatik Broucke ja Prantsuse matemaatik Hénon leidsid arvutite abil uusi. Nii et siiani tunti kolme perekonda: Lagrange-Euleri, Broucke-Hénoni ja kaheksa-kujundi perekonda (viimase avastas USA füüsik Moore 1993.a. ja see kujutab endast kolme keha üksteist taga ajamas mööda 8-kujulist orbiiti). Lagrange-Euleri lahend on lihtsam: kolm sümmeetriliselt 120 kraadi tagant paigutatud keha liiguvad mööda ringi. Ja Broucke-Hénoni lahend on selline, et kaks keha liiguvad edasi-tagasi ja kolmas on orbiidil ümber nende kahe.

Milovan Šuvakov ja Veljko Dmitrašinović võtsid kasutusele täiesti uue perekondade klassifitseerimise süsteemi - abstraktse ruumi nimega "kuju-sfäär", mis kirjeldab orbiitide kuju kehade vahekauguste suhtelistes ühikutes. Näiteks Lagrange-Euleri perekond kujutab kuju-sfääril vaid üht punkti, samal ajal kui perekond "lõngakera" näeb tõesti välja kui lõngakera pärast kassi kätte sattumist.

7. Sundmani teised tööd

Enne oma 1907.aasta tööd kolme keha probleemi kohta polnud Sundman kuigi palju publitseerinud. Lisaks oma doktoritööle oli tal veel kolm artiklit ette näidata. Neist üks oli ahelmurdudest, teine käsitles rõngasmikromeetrit ja kolmas tegeles Gyldéni *A*- ja *B*- koefitsientide leidmist.

Siinkohal tuleb rõhutada Sundmani osa Pulkovos, kui ta aitas Backlundil lõpetada Gyldéni tööd planeetide orbiitidest. Kui Sundman oli Pulkovost koju sõitnud, siis kulus Backlundil veel mitu aastat töö lõpetamiseks, ja kuigi see töö ilmus 1908.a. Backlundi nime all, oli suur osa sellest Sundmani tehtud.

Eespool oli mainitud Sundmani artiklit planeetide liikumise teooria kohta Kleini Encyklopädie's aastal 1915. Carl Källmani andmetel tegi Karl Schwarzschild talle ettepaneku niisugune artikkel entsüklopeediasse kirjutada juba 1904.a märtsi alguses. Seega pidi ta olema jätnud Schwarzschildile väga hea mulje. Sundman kirjutas seda artiklit vähemalt kaheksa aastat, sest ta pani sellesse ka oma kõige uuemad uurimistulemused häiretest planeetide liikumises. Kuid väga veider on, et selles pikas artiklis - pikemas kui ükski teine artikkel matemaatikast selles entsüklopeedias - ei käsitle ta üldisi dünaamilisi printsiipe, mis taevamehaanikas on

laialdaselt kasutusel, samuti mitte Kuu liikumise teooriaid, ega ka mitte kolme keha probleemi.

Samal 1915.a. ilmus temalt veel teinegi artikkel. Kuna planeetide koordinaatide arvutamine oli pikk ja tülikas, siis Sundman otsustas ehitada mehaanilise seadeldise asteroidide orbiitide arvutamiseks ja nimetas selle "perturbograafiks". Selle põhiline eesmärk oli arvutada väikeplaneetide Jupiterist põhjustatud liikumishäired. Sisuliselt pidi perturbograaf oskama lahendada teist järku diferentsiaalvõrrandeid. Sundman jõudis niikaugemale, et esitas perturbograafi joonised. Seadeldis pidi olema nii kiire ja täpne, et kulutas ühe planeedi häirete leidmiseks seitse minutit, samal ajal kui inimesel oleks läinud nende häirete leidmiseks sama täpsusega mitu nädalat. Pole siiski teada midagi sellest, et kas selline seadeldis kunagi ehitati või ei, kuigi ettevõtlik Mittag-Leffler näitas üles suurt huvi asja vastu.

Sundman suhtus suure ettevaatusega Einsteini üldisesse relatiivsusteooriasse. Kui Ernst Lindelöf sai 60 aastaseks (1929), siis avaldas Sundman artikli *La gravitation universelle et sa vitesse de propagation* Soome teadusseltsi toimetistes. Selles artiklis näitas Sundman, et Merkuuri periheeli nihet saab seletada klassikalise mehaanika baasil, kui kasutusele võtta teatud kunstlikke abihüpoteese. Üks neist oli hüpotees raskusjõu levimisest valguse kiirusel. Sundmani jaoks jäid ruum alati eukleidiliseks ja aeg absoluutseks.

Kui Svante Elis Strömghren sai 1940.a. 70 aastaseks, siis sel puhul avaldas Sundman tema auks artikli Poissoni ühe teoreemi originaalsest tõestusest.

Isegi pärast professorist lahkumist 1941.a jätkas Sundman teadustööd. Ta arvutas erakordse täpsusega - ainult 10-kohaliste logaritmitabelite abil - 1945. aasta päikesevarjutuse jaoks Kuu liikumise (artikkel sellest avaldati 1948.a. Balti geodeesiakomisjoni väljaandes). Geodeesiainstituudi direktor Bonsdorff pakkus välja idee, et seda varjutust saaks Sundmani rehkenduste alusel kasutada Euraasia ja Ameerika kontinentide vahelise kauguse mõõtmiseks. Katsetused 1945.a. olid edukad ja 1947.a varjutuse ajal Bonsdorffi idee teostati. Ghana ja Brasiilia vaheline kaugus määrati 140 m täpsusega.

8. Kokkuvõte

Hoolimata oma suurest kuulsusest jäi Karl Sundman inimesena väga tagasihoidlikuks. Tema osavõtlik ja sümpaatne loomus aitasid tal leida palju sõpru nii

kolleegide ringis kui ka sellest väljaspool, kuid ta tegi kõik, et mitte olla rambivalguses.

Tema loengud olid ülimalt asjalikud ja täpsed ning ta püüelnud selle poole, et neid elegantsemaks teha. Kui Sundman oli Helsingi ülikooli tähetorni direktor, siis luges ta observatooriumi peaülesandeks oma eelkäija Anders Donneri eeskujul viia läbi suurt fotograafilise tähekataloogi koostamist. Ka direktoriametis jäi ta tagasihoidlikuks, tema ajal muretseti tõsisema instrumendina ainult Krüssi mikrodensitomeeter.

Sundman pidas väga oluliseks osa võtta Soome teadusseltsi koosolekutest, kust ta harva puudus. Ta oli ka Rootsi Kuningliku teaduste akadeemia välisliige ja ajakirja *Acta Mathematica* toimetuse liige.

Üks on kindel, Karl Fritiof Sundman jääb igaveseks matemaatilise astronoomia annaalidesse kui mees, kes lahendas kolme keha probleemi.

Tänuavaldus

Avaldan sügavat tänu Tapio Markkasele ja Raivo Poolamäele abi eest artikli kirjutamiseks vajaliku kirjanduse hankimisel.

Kirjandus

1. G. Järnefelt, Karl Fritiof Sundman, *Soc. Sci. Fenn. Årsbok* 30 (2), 1 – 13, 1953.
2. T. Markkanen, S. Linnaluoto, M. Poutanen, *Tähtitieteen vaiheita Helsingin yliopistossa*, Helsingin yliopisto, Vaasa, 1984.
3. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Sundman.html>
4. J. Barrow-Green, The dramatic episode of Sundman. *Historia Mathematica*, 37(2), pp. 164 - 203, 2010.
5. K.F. Sundman, Mémoire sur le problème des trois corps, *Acta Mathematica*, 36, pp. 105 - 179, 1912.
6. M. Valtonen, H. Karttunen, The three-body problem, Cambridge University Press, 2005.
7. M.C. Gutzwiller, Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem, *Rev. Mod. Phys.*, 70, No 2, 589 - 639, 1998.
8. E.T. Bell, Men of mathematics, Simon & Schuster, New York, 1986.

9. M. Henkel, Sur la solution de Sundman du problème des trois corps, *Philosophia Scientae*, 5, 161 - 184, 2001.
10. M. Šuvakov, V. Dmitrašinović, Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits, *Rev. Mod. Phys.*, 110, no 11, 114301, 2013.
11. <http://suki.ipb.ac.rs/3body/>